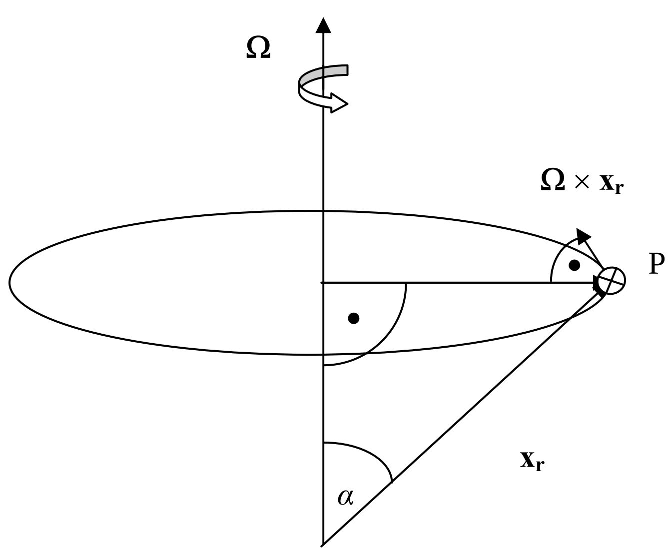
Jednadžba gibanja u sustavu koji rotira

- u inercijalom koordinatnom sustavu Newtonov drugi zakon gibanja možemo simbolički zapisati ovako

$$\frac{D_a \mathrm{v}_a}{Dt} = \sum \mathrm{F}\,. \tag{1}$$

Član na lijevoj strani predstavlja vremensku promjenu apsolutne brzine $\mathbf{v}_a$ prateći gibanje, kako je vidimo iz inercijalnog sustava. Na desnoj strani zbroj svih stvarnih (fundamentalnih) sila koje djeluju po jedinici po jedinici mase česti, odnosno rezultantna akceleracija. Da bi Newtonov drugi zakon vrijedio u rotirajućem koordinatnom sustavu, treba stvarnim silama koje djeluju (fundamentalnim silama) dodati i prividne (pseudo) sile. To možemo pokazati i transformacijom koordinata u jednadžbi (1).

Da prikažemo Newtonov drugi zakon u sustavu koji rotira, moramo najprije naći vezu između apsolutne brzine (brzine u inercijalnom koordinatnom sustavu) $\mathbf{v}_a$ i brzine u sustavu koji rotira (relativnom koordinatnom sustavu) $\mathbf{v}$. Pretpostavimo da relativni koordinatni sustav rotira kutnom brzinom Ω, kao što je prikazanom na slici 1. Neka se u točki P, koja rotira, nalazi čest zraka. Položaj česti u inercijalnom koordinatnom sustavu definiran je vektorom položaja $\mathbf{x_a}$, a u rotirajućem sustavu vektorom položaja $\mathbf{x_r}$. Vektor $\mathbf{R}$ je vektor udaljenosti od osi rotacije do točke P ($\mathbf{R}$ je okomit na Ω).



Slika 1. Brzina koju ima čest ima u apsolutnom (inercijalnom) sustavu zbog rotacije relativnog (neinercijalnog) koordinatnog sustava. Čest miruje u točki P s obzirom na sustav koji rotira kutnom brzinom $\mathbf{\Omega}$.

Ako čest miruje u relativnom koordinatnom sustavu, ona se ipak giba s obzirom na inercijalni sustav, jer sam relativni sustav rotira. Zbog toga će promatrač koji miruje u inercijalnom (fiksnom) koordinatnomn sustavu vidjeti da čest ima brzinu $D_a\mathbf{x_a}/Dt = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}$.

Ako se čest giba u odnosu na relativni koordinatni sustav, promatrač u tom sustavu vidi da čest ima brzina $D\mathbf{x_r}/Dt$. Međutim, promatrač koji promatra gibanje iz fiksnog sustava, osim gibanja česti u relativnom ($D\mathbf{x_r}/Dt$) sustavu vidi i gibanje česti zbog rotacije relativnog sustava ($\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}$), pa je pa stoga vidi brzinu česti viđena iz fiksnog sustava ($D_a\mathbf{x_a}/Dt$)

$$\frac{D_a x_a}{Dt} = \frac{Dx_r}{Dt} + \Omega \times x_r \,. \tag{2}$$

Da bi odredili akceleraciju u apsolutnom koordinatnom sustavu, moramo naći totalni diferencijal brzine u apsolutnom sustavu $D_a{}^2\mathbf{x_a}/Dt^2$. Kako je općenito veza između totalnog diferencijala vektora i inercijalnom sustavu ($D_a\mathbf{A}/Dt$) i totalnog diferencijala vektora u neinercijalnom sustavu koji rotira kutnom brzinom $\mathbf{\Omega}$ ($D\mathbf{A}/Dt$) slijedeća:

$$\frac{D_a A}{Dt} = \frac{DA}{Dt} + \Omega \times A \,,$$

gdje je **A** bilo koji vektor, isti odnos mora vrijediti i za i za vektor brzine $D_a\mathbf{x_a}/Dt$:

$$\frac{D_a}{Dt}\left(\frac{D_a x_a}{Dt}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{D_a x_a}{Dt}\right) + \Omega \times \left(\frac{D_a x_a}{Dt}\right).$$

U gornjoj jednadžbi prikažimo sada brzinu u apsolutnom sustavu pomoću brzine u relativnom sustavu kao što je prikazano jednadžbom (2). Dobije se

$$\frac{D_a{}^2 x_a}{Dt^2} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{Dx_r}{Dt} + \Omega \times x_r\right) + \Omega \times \left(\frac{Dx_r}{Dt} + \Omega \times x_r\right).$$

Budući je vektor kutne brzine rotacije konstantan i po smjeru i po iznosu, možemo ga staviti ispred operatora $D_\mathbf{r}/Dt$ pa je akceleracija prikazana u inercijalnom koordinatnom sustavu

$$\frac{D_a{}^2 x_a}{Dt^2} = \frac{D^2 x_r}{Dt^2} + 2\Omega \times \frac{Dx_r}{Dt} + \Omega \times \left(\Omega \times x_r\right). \tag{3}$$

Želimo odrediti čemu je jednak član $\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r})$. Najprije gledamo čemu je jednak modul vektora $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}$. Pri tom će nam pomoći slika 1.

$$|\Omega\times x_r| = \Omega x_r \sin\alpha = \Omega x_r \frac{R}{x_r} = \Omega R = \Omega R \sin 90 = |\Omega\times R|.$$

Nadalje, iz slike 1. je vidljivo da vektori $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}$ i $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$ imaju isti smjer i orijentaciju, pa je $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$. Odatle je $\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}) = \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$. Primjenom pravila koja vrijede za vektroski i skalarni produkt vektora, gdje su **A**, **B** i **C** proizvoljni vektori, a A, B i C njihovi moduli

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})$$
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin(\mathbf{A},\mathbf{B})$$

dobivamo

$$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x_r}) = \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}) = \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}) =$$

$$= \mathbf{\Omega}(\Omega R\cos 90) - \mathbf{R}(\Omega^2\cos 0) = -\Omega^2\,\mathbf{R}.$$

Uvrstimo gornju jednakost u izraz za akceleraciju u inercijalnom koordinatnom sustavu (3). Tako dobivamo akceleraciju u inercijalnom sustavu izraženu preko akceleracije u relativnom (neinercijalnom) sustavu

$$\frac{D_a^2 x_a}{Dt^2} = \frac{D^2 x_r}{Dt^2} + 2\Omega\times\frac{Dx_r}{Dt} - \Omega^2 R. \qquad (4)$$

Jednadžba (4) pokazuje da je akceleracija česti prateći gibanje u apsolutnom (inercijalnom) sustavu jednaka zbroju akceleracije česti prateći gibanje u relativnom (neinercijalno) koordinatnom sustavu koji rotira ($D^2\mathbf{x_r}/Dt^2$), Coriolisove akceleracije koja postoji zbog relativnog gibanja česti u odnosu na sustav koji rotira ($2\mathbf{\Omega}\times D\mathbf{x_r}/Dt$) i centripetalne akceleracije koja postoji zbog rotacije koordinata ($-\Omega^2\,\mathbf{R}$).

Akceleracija koju čest ima u inercijalnom koordinatnom sustavu, posljedica je istovremenog djelovanja svih fundamentalnih sila na čest. Fundamentalne sile koje djeluju na neku čest u atmosferi jesu sila gradijenta tlaka, gravitacija i sila trenja, a pripadne akceleracije su $-(1/\rho)\nabla p$ (akceleracija sile gradijenta tlaka), $\mathbf{g}^*$ (akceleracija gravitacije) i $\mathbf{a_{tr}}$ (akceleracija zbog trenja, u ovom slučaju to je deceleracija jer se čest zbog trenja usporava). Stoga je akceleracija koju čest ima zbog djelovanja svih sila jednaka zbroju vektora $-(1/\rho)\nabla p + \mathbf{g}^* + \mathbf{a_{tr}}$. Dakle, akceleracija u inercijalnom sustavu, koja je prikazana jednadžbom (7.1.4), mora biti jednaka rezultantnoj akceleraciji -(1/ρ)∇p + $\mathbf{g}^{*}$ + $\mathbf{a}_{\mathbf{tr}}$

$$\underbrace{\frac{D_a{}^2\mathrm{x}_a}{Dt^2}}_{\substack{\text{akceleracija u}\\ \text{apsolutnom}\\ \text{(inercijalnom)}\\ \text{sustavu}}} = \underbrace{\frac{D^2\mathrm{x}_r}{Dt^2}}_{\substack{\text{akceleracija u}\\ \text{relativnom}\\ \text{(neinercijalnom)}\\ \text{sustavu koji}\\ \text{rotira}}} + \underbrace{2\Omega \times \frac{D\mathrm{x}_r}{Dt}}_{\substack{\text{Coriolisova}\\ \text{akceleracija}}} \underbrace{- \Omega^2\mathrm{R}}_{\substack{\text{centripetaln}\\ \text{a}\\ \text{akceleracija}}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\substack{\text{akceleracij}\\ \text{a sile}\\ \text{gradijenta}\\ \text{tlaka}}} + \underbrace{\mathrm{g}^*}_{\substack{\text{akceleracij}\\ \text{a}\\ \text{gravitacije}}} + \underbrace{\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}}_{\substack{\text{akceleracija}\\ \text{sile trenja}}}. \tag{5}$$

Kako se naša mjerenja, dijagnostičke analize i prognoze odnose na Zemlju koja rotira, ne zanima nas akceleracija u apsolutnom sustavu, već nas zanima akceleracija u relativnom sustavu koji rotira. Stoga ćemo jednadžbu (5) preurediti tako da izostavimo lijevu stranu jednakosti. U novoj jednadžbi kao nepoznanicu ćemo pisati akcelreciju u relativnom sustavu

$$\frac{D^2\mathrm{x}_r}{Dt^2} = -2\Omega \times \frac{D\mathrm{x}_r}{Dt} + \Omega^2\mathrm{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathrm{g}^* + \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}$$

Rezultanta centrifugalne akceleracije Ω^2 **R** i akceleracije gravitacije $\mathbf{g}^{*}$ jednaka je akceleraciji sile teže **g**, a totalni diferencijal vektora položaja čestì u relativnom koordinatnom sustavu prateći gibanje $D\mathbf{x}_\mathbf{r}/Dt$ upravo je jednak brzini čestì u relativnom sustavu **v**, pa Newtonov drugi zakon gibanja konačno poprima ovaj oblik

$$\frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -2\Omega \times \mathrm{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathrm{g} + \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}. \tag{6}$$

Tom jednadžbom Newtonov drugi zakon gibanja izražen je u sustavu koji rotira (relativnom, neinercijalnom sustavu). Jednadžba (6) pokazuje da je akceleracija prateći relativno gibanje u sustavu koji rotira jednaka rezultanti akceleracija koje postoje zbog djelovanja Coriolisove sile, sile gradijenta tlaka, sile teže i sile trenja. To je jedna od temeljnih jednadžbi u dinamičkoj meteorologiji, a naziva se još i **jednadžba gibanja** ili **jednadžba impulsa**. U njoj je drugi Newtonov zakon gibanja izražen preko totalne promjene impulsa po jedinici mase prateći gibanje. Isti zakon katkad se izražava i preko totalne promjene impulsa po jedinici volumena.

U velikom broju problema dinamičke meteorologije djelovanje sile trenja se zanemaruje pa jednadžba (6) poprima jednostavniji oblik

$$\frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -2\Omega \times \mathrm{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathrm{g}. \tag{7}$$

Utjecaj podloge na atmosferska gibanja opada visinom, a najviše se osjeća unutar prvih 1-3 km visine nad tlom, tj. u atmosferskom graničnom sloju. U atmosferskom graničnom sloju, koji je upravo definiran kao granični dio troposfere koji je pod direktnim utjecajem zemljine podloge, trenje se ne može zanemariti. Međutim, u visinama iznad atmosferskog graničnog sloja, djelovanje trenja je zanemarivo malo, pa tada koristimo jednadžbu oblika (7). Dio atmosfere koji se nalazi iznad atmosferskog graničnog sloja, pa je stoga djelovanje sile trenja u njemu zanemarivo malo, nazivamo **slobodna atmosfera** (upravo zato što je gibanje u njemu 'slobodno', odnosno nije uvjetovano trenjem). Slično, dio troposfere koji se nalazi iznad atmosferskog graničnog sloja nazivamo **slobodna troposfera**.