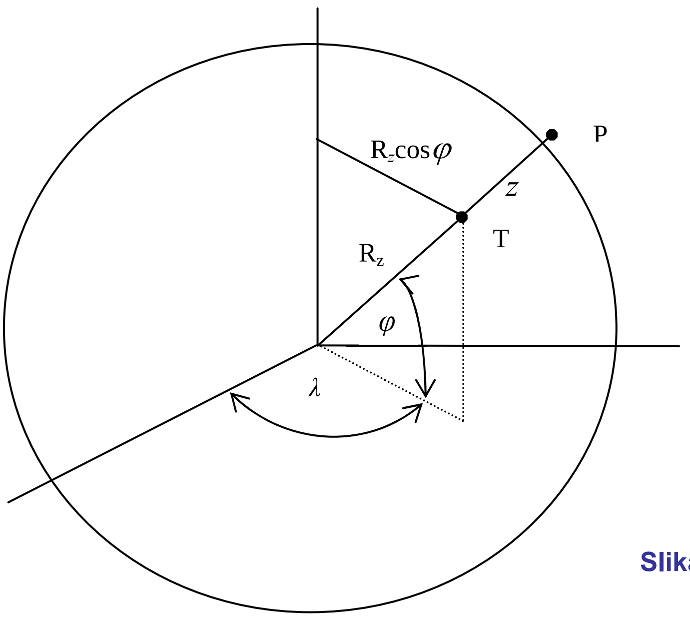
Jednadžba gibanja u sfernim koordinatama

Katkad je u teorijskim razmatranjima pogodno jednadžbu gibanja u sustavu koji rotira

$$\frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -2\Omega \times \mathrm{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathrm{g} + \mathrm{a}_{\mathrm{tr}}$$

prikazati u skalarnom obliku. Kako u meteorologiji možemo potpuno zanemariti odstupanje Zemlje od kugle, jednadžbu gibanja pišemo tada u sfernim koordinatama (vidi sliku 1). U tom obliku pogodna je npr. za potrebe numeričkih prognoza na hemisferskoj ili globalnoj skali.

Označimo koordinatne osi sfernog sustava sa (λ, φ, z), gdje je λ zemljopisna dužina, φ je širina, a z je vertikalna udaljenost od Zemljine površine pa do promatrane točke P (slika 1). Neka je r udaljenost od središta Zemlje (središta sfernog sustava) pa do promatrane točke P. Tada je r = R_z + z, gdje je R_z radijus Zemlje. Kako ovdje pretpostavljamo da je Zemlja kugla, R_z je konstantan.



Slika 1. Sferni koordinatni sustav.

Ako postavimo jedinične vektore **i**, **j** i **k** tako da **i** bude orijentiran prema istoku, **j** prema sjeveru, a **k** vertikalno prema gore, relativna brzina (brzina u odnosu na neku točku na Zemljinoj površini) je

$$\mathbf{v} \equiv u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k},$$

gdje su komponente brzine u, v i w definirane ovako

$$u \equiv r\cos\varphi\frac{D\lambda}{Dt}, \qquad v \equiv r\frac{D\varphi}{Dt}, \qquad w \equiv \frac{Dz}{Dt}. \tag{1}$$

Većina meteoroloških procesa (procesa koji upravljaju vremenom i klimom) događa se u troposferi. Kako je srednji radijus Zemlje puno je veći od debljine troposfere (R_z = 6371 km), u dinamičkoj meteorologiji često pretpostavljamo da je visina z puno manja od R_z. Odatle slijedi:

$$r = R_z + z \approx R_z.$$

Definirajmo sad koordinatni sustav s ortogonalnim osima (x, y, z) takav da je x os usmjerena prema istoku, y os prema sjeveru, a z os vertikalno prema gore. Taj koordinatni sustav nije Kartezijev, budući da smjerovi jediničnih vektora **i**, **j** i **k** nisu konstantni, već su funkcije položaja na Zemljinoj kugli. U tom koordinatnom sustavu udaljenosti u x i y smjeru su takve da je $Dx = R_z \cos\varphi\, D\lambda$ i $Dy = R_z\, D\varphi$. Odatle su horizontalne komponente brzine $u \equiv Dx/Dt$ (komponenta prema istoku) i $v \equiv Dy/Dt$ (komponenta prema sjeveru), a vertikalna komponenta brzine je $w \equiv Dz/Dt$. Da odredimo akceleraciju, moramo naći totalni diferencijal brzine u vremenu prateći gibanje $D\mathbf{v}/Dt$, gdje je vektor brzine $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$. Budući da su i smjerovi jediničnih vektora promjenjivi, vektor akceleracije je

$$\frac{D\mathrm{v}}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\mathrm{i} + \frac{Dv}{Dt}\mathrm{j} + \frac{Dw}{Dt}\mathrm{k} + u\frac{D\mathrm{i}}{Dt} + v\frac{D\mathrm{j}}{Dt} + w\frac{D\mathrm{k}}{Dt}. \qquad (2)$$

Odrediti ćemo najprije promjene jediničnih vektora prateći gibanje. Nađimo prvo $D\mathbf{i}/Dt$. Upotrebom izraza za totalni diferencijal dobivamo:

$$\frac{D\mathrm{i}}{Dt} = \frac{\partial \mathrm{i}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial z} \right).$$

Jedinični vektor **i** nije funkcija vremena, pa je stoga $\partial \mathbf{i}/\partial t = 0$. Također, **i** se ne mijenja ni s promjenom zemljopisne širine ($\partial \mathbf{i}/\partial y = 0$), niti s promjenom položaja duž vertikale ($\partial \mathbf{i}/\partial z = 0$), pa tako dobivamo

$$\frac{D\mathrm{i}}{Dt} = u\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x}.$$

Slika 2. prikazuje kako se smjer jediničnog vektora **i** mijenja u ovisnosti o promjeni zemljopisne dužine $\delta\lambda$. Pretpostavimo da je pomak duž paralele δx infinitezimalno malen. Tada možemo pretpostaviti da je δx baza jednakokračnog trokuta čiji su krakovi $R_z \cos\varphi$. Taj je trokut sličan jednakokračnom trokutu baze $\delta\mathbf{i}$, pa stoga vrijedi

$$\frac{|\delta \mathrm{i}|}{\delta x} = \frac{|\mathrm{i}|}{R_z \cos\varphi}.$$

Potražimo limes gornjeg izraza za $\delta x \to 0$. U limesu operator δ prelazi u parcijalni diferencijal ∂

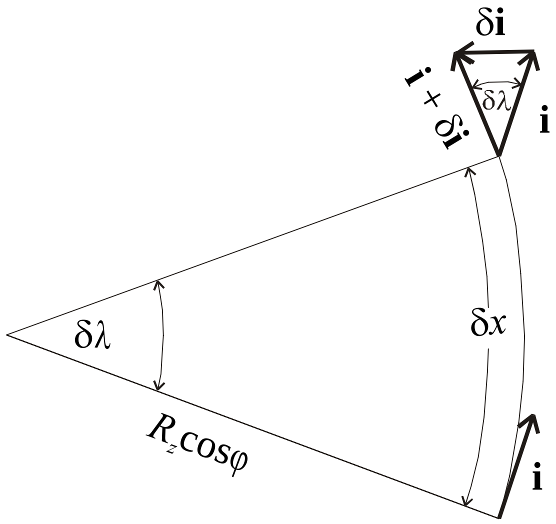
$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{|\delta \mathrm{i}|}{\delta x} = \frac{|\partial \mathrm{i}|}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{|\mathrm{i}|}{R_z \cos\,\varphi} = \frac{1}{R_z \cos\,\varphi}\,. \tag{3}$$

Jednadžbom (3) odredili smo modul vektora $\partial\mathbf{i}/\partial z$. Da odredimo sam vektor trebamo znati smjer i orijentaciju vektora. Iz slike 2. vidimo da je **δi** u smjeru radijusa paralele, a orijentiran je prema osi rotacije. Dakle i $\partial\mathbf{i}/\partial x$ je istog smjera i orijentacije, pa ga, kao što je prikazano na slici 3., možemo rastaviti na komponentu u smjeru *y* osi i komponentu u smjeru *z* osi. Tako na kraju dobivamo promjenu jediničnog vektora **i** u x smjeru

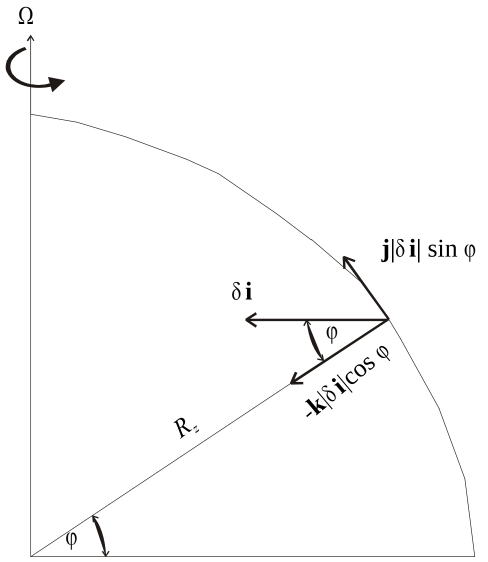
$$\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x} = \frac{1}{R_z \cos\,\varphi}\left(\sin\varphi \mathrm{j} - \cos\varphi \mathrm{k}\right),$$

odnosno totalni diferencijal jediničnog vektora **i**

$$\frac{D\mathrm{i}}{Dt} = u\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial x} = \frac{u}{R_z \cos\,\varphi}\left(\sin\varphi \mathrm{j} - \cos\varphi \mathrm{k}\right). \tag{4}$$



Slika 2. Promjena jediničnog vektora **i** u ovisnosti o promjeni geografske dužine $\delta\lambda$. Luk δx je proteže se duž paralele. Mijenja se samo smjer jediničnog vektora a modul je konstantan: $|\mathbf{i}+\delta\mathbf{i}| = |\mathbf{i}|$. Vektor **δi** je u smjeru osi rotacije.



Slika 3. Komponente vektora δ**i**: komponenta prema sjeveru i vertikalna komponenta.

Sada ćemo odrediti promjenu jediničnog vektora **j** (D**j**/Dt). Vektor **j** ne ovisi ni o vremenu niti o vertikalnoj koordinati, pa je

$$\frac{D\mathrm{j}}{Dt} = u\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial y}. \tag{5}$$

Da nađemo promjenu **j** duž osi x, poslužit će nam slika 4. Sa slike vidimo da je δ**j** orijentiran u negativnom smjeru osi x, pa je i ∂**j**/∂x jednakog smjera i orijentacije. Nadalje, uočavamo dva slična jednakokračna trokuta. Veći ima bazu δx i krakove $R_z$ctg, a baza manjeg je $|\delta\mathbf{j}|$, dok su krakovi jednaki $|\mathbf{j}|$. Iz sličnosti tih dvaju trokuta dobivamo

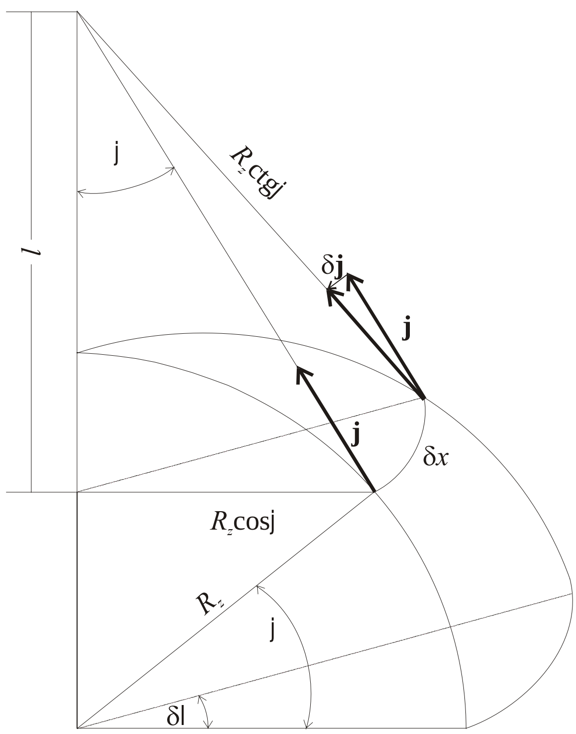
$$\frac{|\delta \mathrm{j}|}{|\mathrm{j}|} = \frac{\delta x}{R_z \mathrm{ctg}\varphi},$$

odnosno

$$\frac{|\delta \mathrm{j}|}{\delta x} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{R_z}.$$

Kad uvažimo smjer i orijentaciju vektora, u limesu $\delta x \to 0$ dobivamo

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta \mathrm{j}}{\delta x} = \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial x} = -\frac{\mathrm{tg}\varphi}{R_z}\mathrm{i}. \tag{6}$$



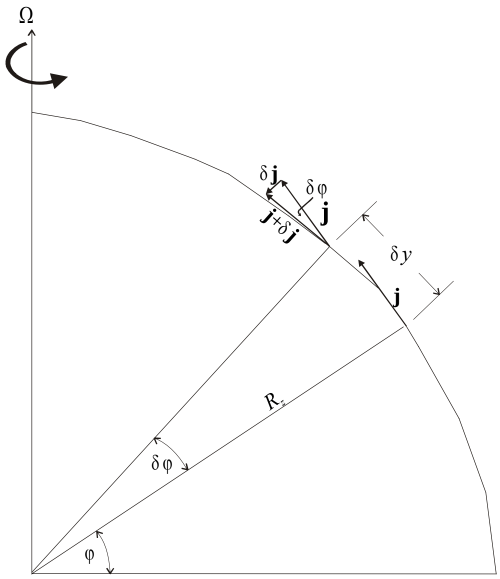
Slika 4. Ovisnost jediničnog vektora **j** o zemljopisnoj dužini. S promjenom dužine mijenja se samo smjer a ne i modul vektora **j.** Vektor δ**j** je usmjeren prema zapadu.

Da bi odredili *D***j**/*Dt* još trebamo naći ∂**j**/∂*y*. Sa slike 5. vidimo da se pri promjeni zemljopisne širine za $\delta\varphi$, jedinični vektor **j** promijeni za δ**j**, gdje je δ**j** u smjeru –*z* osi. Iz jednakokračnog trokuta s krakovima |**j**| i |**j**+δ**j**|, te bazom |δ**j**| vidimo da je |δ**j**| = |**j**|$\delta\varphi = \delta\varphi$. Ako uvažimo smjer i orijentaciju vidimo da je vektor δ**j** = |δ**j**|(-**k**) = - $\delta\varphi$ **k**. Nadalje, ako se zemljopisna širina promijeni za $\delta\varphi$, tada je pripadna meridionalna promjena promjena δy, gdje je $\delta y = R_z \delta\varphi$. Odatle je

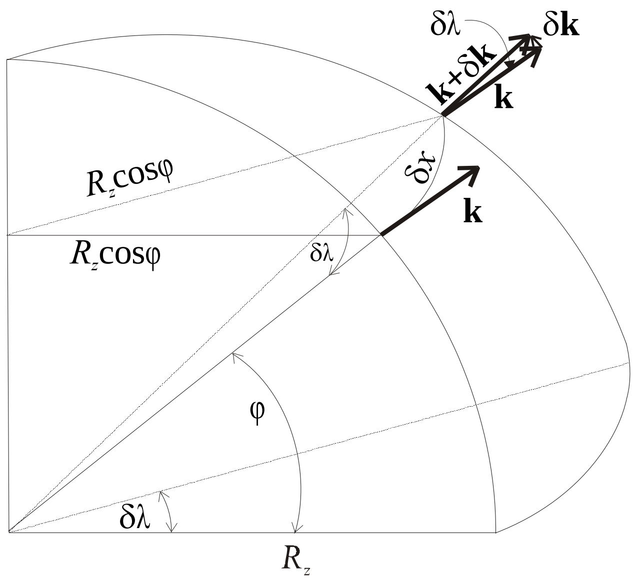
$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial y} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta \mathrm{j}}{\delta y} = \frac{-\delta\varphi}{R_z \delta\varphi} \mathrm{k} = -\frac{1}{R_z} \mathrm{k} \,. \qquad (7)$$

Konačno na temelju jednadžbi (5) - (7) dobivamo

$$\frac{D\mathrm{j}}{Dt} = u \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial y} = -u \frac{tg\varphi}{R_z} \mathrm{i} - v \frac{1}{R_z} \mathrm{k} \,. \qquad (8)$$



Slika 5. Ovisnost jediničnog vektora **j** o zemljopisnoj širini. S promjenom zemljopisne širine mijenja se samo smjer, a ne i modul jediničnog vektora **j**. Vektor δ**j** je usmjeren vertikalno prema dolje.



Slika 6. Ovisnost jediničnog vektora **k** o zemljopisnoj dužini. Vektor δ**k** je usmjeren prema istoku.

Slično, smjer jediničnog vektora **k** ovisi samo o zemljopisnoj širini i dužini pa je totalni diferencijal $D\mathbf{k}/Dt$ jednak

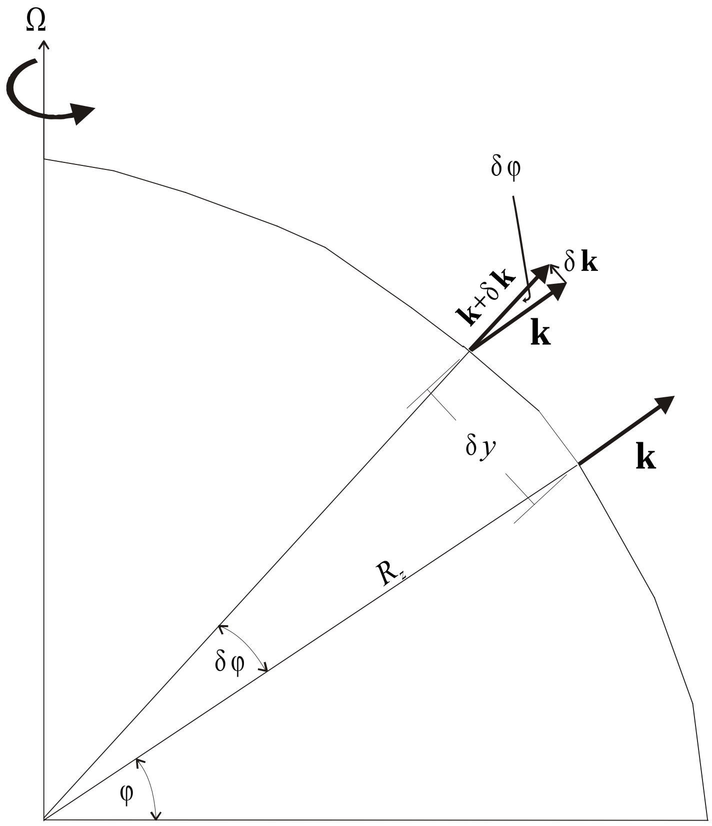
$$\frac{D\mathrm{k}}{Dt} = u\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial y}. \tag{9}$$

Slika 6. pokazuje da pomaku δx odgovara promjena $\delta\mathbf{k}$, koja je u smjeru pozitivne x osi, pa je i $\partial\mathbf{k}/\partial x$ u istom smjeru. Nadalje, iz sličnosti dva jednakokračna trokuta slijedi

$$\frac{|\delta \mathrm{k}|}{\delta x} = \frac{|\mathrm{k}|}{R_z} = \frac{1}{R_z},$$

te na kraju dobivamo

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta \mathbf{k}}{\delta x} = \frac{1}{R_z} \mathbf{i} . \qquad (10)$$



Tražimo sada $\partial \mathbf{k}/\partial y$. Sa slike 7. je vidljivo da je $\delta \mathbf{k}$ u pozitivnom smjeru *y* osi. Iz sličnosti dvaju jednakokračnih trokuta slijedi

$$\frac{|\delta \mathrm{k}|}{\delta y} = \frac{|\mathrm{k}|}{R_z} = \frac{1}{R_z}\,.$$

Uvažimo li smjer i orijentaciju vektora, dobivamo

$$\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial y} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta \mathrm{k}}{\delta y} = \frac{1}{R_z}\,\mathrm{j}\,. \tag{11}$$

Konačno upotrebom jednadžbi (9) – (11) dobivamo totalni diferencijal jediničnog vektora **k**

$$\frac{D\mathrm{k}}{Dt} = u\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial y} = \frac{u}{R_z}\,\mathrm{i} + \frac{v}{R_z}\,\mathrm{j}\,. \tag{12}$$

Uvrstimo sada jednadžbe (4), (8) i (12) u izraz za akceleraciju prateći gibanje u relativnom koordinatnom sustavu (2) i preuredimo tako da izdvojimo članove po smjerovima *x*, *y* i *z*

$$
\begin{aligned}
\frac{D\mathrm{v}}{Dt} &= \frac{Du}{Dt}\mathrm{i}+\frac{Dv}{Dt}\mathrm{j}+\frac{Dw}{Dt}\mathrm{k}+u\frac{D\mathrm{i}}{Dt}+v\frac{D\mathrm{j}}{Dt}+w\frac{D\mathrm{k}}{Dt}=\frac{Du}{Dt}\mathrm{i}+\frac{Dv}{Dt}\mathrm{j}+\frac{Dw}{Dt}\mathrm{k}+\\
&+\frac{u^2}{R_z\cos\varphi}\left(\sin\varphi\mathrm{j}-\cos\varphi\mathrm{k}\right)+v\left(-u\frac{tg\varphi}{R_z}\mathrm{i}-v\frac{1}{R_z}\mathrm{k}\right)+w\left(\frac{u}{R_z}\mathrm{i}+\frac{v}{R_z}\mathrm{j}\right)= \qquad (13)\\
&=\left(\frac{Du}{Dt}-\frac{uvtg\varphi}{R_z}+\frac{uw}{R_z}\right)\mathrm{i}+\left(\frac{Dv}{Dt}+\frac{u^2tg\varphi}{R_z}+\frac{vw}{R_z}\right)\mathrm{j}+\left(\frac{Dw}{Dt}-\frac{u^2+v^2}{R_z}\right)\mathrm{k}
\end{aligned}
$$

Akceleracija, koja je prikazana jednadžbom (13), postoji zbog sila koje stvarno djeluju u inercijalnom sustavu, te zbog pseudosila (koje su posljedica rotacije relativnog sustava u odnosu na inercijalni sustav. Stoga akceleracija (13) mora zadovoljavati Newtonov drugi zakon gibanja u relativnom (neinercijalnom) sustavu, a koji je prikazan jednadžbom

$$
\frac{D\mathrm{v}}{Dt}=-2\Omega\times\mathrm{v}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathrm{g}+\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}.
$$

Tu jednadžbu također ćemo preurediti tako da izdvojimo članove po smjerovima koordinatnih osi

$$
\begin{aligned}
\frac{D\mathrm{v}}{Dt} &= -2\Omega\times\mathrm{v}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathrm{g}+\mathrm{a}_{\mathrm{tr}}=-2\Omega\left(\cos\varphi\mathrm{j}+\sin\varphi\mathrm{k}\right)\times\left(u\mathrm{i}+v\mathrm{j}+w\mathrm{k}\right)+\\
&-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{k}\right)-g\mathrm{k}+\left(a_{tr}\right)_x\mathrm{i}+\left(a_{tr}\right)_y\mathrm{j}+\left(a_{tr}\right)_z\mathrm{k}= \qquad (14)\\
&=\left(-2\Omega w\cos\varphi+2\Omega v\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left(a_{tr}\right)_x\right)\mathrm{i}+\\
&=\left(-2\Omega u\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\left(a_{tr}\right)_y\right)\mathrm{j}+\left(2\Omega u\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+\left(a_{tr}\right)_z\right)\mathrm{k}
\end{aligned}
$$

gdje su $(a_{tr})_x$, $(a_{tr})_y$ i $(a_{tr})_z$ komponente akceleracije zbog trenja u x, y i z smjeru, a g je akceleracija sile teže. Izjednačimo x, y i z komponente akceleracije prikazane jednadžbama (13) i (14). Tako dobivamo tri jednadžbe skalarnog oblika. Jednadžba u smjeru istoka (x komponenta vektorske jednadžbe gibanja) je

$$
\frac{Du}{Dt}-\frac{uvtg\varphi}{R_z}+\frac{uw}{R_z}=-2\Omega w\cos\varphi+2\Omega v\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left(a_{tr}\right)_x, \qquad (15)
$$

u smjeru sjevera (y komponenta)

$$
\frac{Dv}{Dt}+\frac{u^2tg\varphi}{R_z}+\frac{vw}{R_z}=-2\Omega u\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\left(a_{tr}\right)_y, \qquad (16)
$$

a vertikalna (z) komponenta jednadžbe gibanja je

$$\frac{Dw}{Dt}-\frac{u^2+v^2}{R_z}=2\Omega u\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+\left(a_{tr}\right)_z . \tag{17}$$

Članovi koji su proporcionalni s $1/R_z$ zovu se **članovi zakrivljenosti**, a postoje zbog zakrivljenosti Zemlje. Kako u sebi sadrže umnoške zavisnih varijabli (komponente vektora brzine međusobno su zavisne varijable), nelinearni su, te stoga otežavaju teorijske analize jednadžbi (15) – (17). Međutim, za gibanja u umjerenim širinama na sinoptičkoj skali članovi zakrivljenosti zanemarivo mali u odnosu na ostale članove u jednadžbama gibanja. Ipak, i nakon zanemarivanja članova zakrivljenosti, jednadžbe (15) – (17) i dalje ostaju nelinearne, jer se nelinearni članovi nalaze u advektivnim članovima totalnih diferencijala komponenti brzine. Tako je npr.

$$\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},$$

a slične nelinearne izraze imamo i u advektivnim članovima totalnih diferencijala Du/Dt i Dw/Dt. Te nelinearne članove ne možemo zanemariti, budući da su im magnitude usporedive s magnitudama komponenti lokalne promjene brzine $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ i $\partial w/\partial t$. Stoga nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe (15) – (17) **nemaju analitičkih rješenja**, već se moraju rješavati **numerički**.